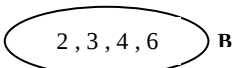


BETEKINTŐ ANYAG

Az alábbiakban a „*Matematika ötlettár középszintű érettségire*” című 400 oldalas könyvem néhány oldalának részletét tekintheted meg. Igyekeztem minél több témakörből válogatni ebben a 18 oldalnyi anyagban. Bízom benne, hogy meggyőztelek, s megrendeled a könyvet.

Halmaz fogalma

A halmazt **alapfogalom**nak tekintjük, nem értelmezzük. A halmaz elemekből áll. Egy halmazban annak mindegyik eleme, csak egyszer fordulhat elő, bár többször felsorolhatjuk.

Jelölése:	<i>A halmazokat általában az ábécé nagy betűivel jelöljük.</i>	Például: B $x \in B$ Ha <u>nem</u> eleme: $x \notin B$
Megadása:	Szintetikusán: A halmaz elemeinek felsorolásával. Analitikusan: A halmaz elemeire jellemző tulajdonság megadásával.	$B := \{1;2;3;4;6;12\}$ <i>A betű után a kettőspont egyenlő jel a definiáló egyenlőség jele. (Olvasva: „definíció szerint egyenlő”) A kapcsos zárójelek között soroljuk fel az elemeket.</i> $B := \{x \mid x \in N \text{ és } x \mid 12\}$ <i>Azok a természetes számok, melyek osztói a 12-nek.</i>
Ábrázolása:	Legtöbbször a Venn-Euler-diagrammot használjuk. Ezt a továbbiakban halmazábrának nevezzük.	

Halmazok számossága

A halmazok számossága alatt eleminek számát értjük. *Jele:* az abszolútérték jel. Például: $|B| = 4$

A halmazok lehetnek **végesek** (elemeik száma meghatározható), vagy **végtelenek** (az elemek száma nem határozható meg). Az egyetlen elemet sem tartalmazó halmaz **üres** halmaznak nevezzük. *Jele:* $\emptyset$ vagy $\{\}$

Egyenlő halmazok, részhalmaz

A D halmaz valódi részalmaza a C halmaznak, ha a D minden eleme hozzátartozik a C halmazhoz, de nem egyenlők. <i>Jele:</i> $D \subset C$ Ha az egyenlőség is megengedett akkor csak a részhalmaz elnevezést használjuk, s ekkor a $D \subseteq C$ jelölést használjuk.	Például: $C := \{a;b;c;d;e;f\}$ $D := \{c;d;f\}$
Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazza. Ekkor mindkettő részhalmaz a másinak. <i>Jele:</i> $A = B$	Például: $A := \{2;3;4;6\};$ $B := \{12 \text{ valódi osztói}\}$

Legnagyobb közös osztó

Az **a** és **b** számok legnagyobb közös osztóján az **a** és **b** számok közös osztói közül a legnagyobb számot értjük.

Más megfogalmazásban: Legyen $a, b, d \in \mathbb{N}^+$. Az **a** és **b** szám legnagyobb közös osztóján azt a **d** számot értjük, melyre teljesül:

- a **d** közös osztó, azaz $d|a$ és $d|b$ (*d osztója a-nak és b-nek*)
- a **d** szám az **a** és **b** szám bármely közös osztójának többszöröse.

A legnagyobb közös osztó jele a zárójel. A fenti megfogalmazás alapján: **(a; b) = d**

A legnagyobb közös osztó meghatározása:

- Kisebb számok esetén:

Például: határozzuk meg a 24 és 36 legnagyobb közös osztóját!

Első módszer: felírjuk az adott számokat osztópárok segítségével, melyből egyszerű az osztók felírása:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \text{ (A továbbiak már ismétlődnek.)}$$

$$36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \text{ (A továbbiak már ismétlődnek.)}$$

Az osztók felírásánál először a szorzatok első tényezőit írd le sorba, majd utána visszafelé a második tényezőket. Így növekvő sorrendbe kerülnek az osztók.

24 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12; 24.

36 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.

A két szám közös osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

A közös osztók közül a legnagyobb: 12.

Ezek alapján: **(24; 36) = 12**.

Második módszer:

Elkészítjük a két szám prímtényezős felbontását, majd mindegyiknél ugyanazokat a számokat megjelöljük.

A megjelölt tényezők szorzatát vesszük.

Ez a legnagyobb közös osztó: **(24; 36) = 2 · 2 · 3 = 12**

24	2	36	2
12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

- Nagyobb számok esetén: elkészítjük az adott számok prímtényezős felbontását, majd az azonos alapú, kisebb kitevőjű hatványok szorzatát vesszük.

Például:

$$a = 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$b = 1584 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$(a; b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Adottak az alábbi számok prímtényezős alakban. Meghatározzuk a legnagyobb közös osztójukat.

Azonos alapú hatvány a 2 és a 3. Az a számban a 2², a b-ben 2⁴ szerepelt. Közülük a kisebb kitevőjű a 2². A 3 hatványai közül ugyanígy választunk

NEVEZETES SZORZATOK

$$a, b, c \in R$$

1. Két tag összegének (különbségének) négyzete	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ Két tag összegének (különbségének) négyzete egyenlő az első tag négyzete $\pm$ az első és a második tag szorzatának kétszerese + a második tag négyzete. Ezt teljes négyzetnek is nevezzük. $(x+3)^2 = x^2 + x \cdot 3 \cdot 2 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ $(2c-5d)^2 = (2c)^2 - (2c) \cdot (5d) \cdot 2 + (5d)^2 = 4c^2 - 20cd + 25d^2$ $(2a^2-3b^3)^2 = (2a^2)^2 - 2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 2 + (3b^3)^2 = 4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6$ $\left(\frac{3a}{4} + \frac{5b^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \frac{3a}{4} \cdot \frac{5b^2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{5b^2}{3}\right)^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{5ab^2}{2} + \frac{25b^4}{9}$
2. Ugyanazon két tag összegének és különbségének szorzata	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ Ugyanazon két tag összegének és különbségének a szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével. Ebből következik, hogy $(a+b) \mid (a^2 - b^2)$ azaz a+b osztója a²-b², valamint $(a-b) \mid (a^2 - b^2)$ azaz a-b osztója a²-b² kifejezésnek $(x+6) \cdot (x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$ így x+6 illetve x-6 osztója az x²-36 kifejezésnek $(4e-5f) \cdot (4e+5f) = (4e)^2 - (5f)^2 = 16e^2 - 25f^2$ $\left(\frac{2}{5}x + \frac{7}{6}y\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{7}{6}y\right) = \left(\frac{2}{5}x\right)^2 - \left(\frac{7}{6}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 - \frac{49}{36}y^2$
3. Három tag négyzete	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ Három tag összegének négyzetét kapjuk, ha a három tag négyzetének összegéhez hozzáadjuk az összes lehetséges módon kiválasztott két-két tag szorzatának kétszeresét. $(2x+3y+4)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + 4^2 + 2x \cdot 3y \cdot 2 + 2x \cdot 4 \cdot 2 + 3y \cdot 4 \cdot 2 =$ $= 4x^2 + 9y^2 + 16 + 12xy + 16x + 24y$ $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{-b}{3} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{4} + 2 \cdot \frac{-b}{3} \cdot \frac{c}{4} =$ $= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab}{3} + \frac{ac}{4} - \frac{bc}{16}$
4. Két tag összegének (különbségének) köbe	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ Két tag összegének (különbségének) a köbe = az első tag köbe $\pm$ az első tag négyzete szorozva a második tag háromszorosával + az első tag háromszorosa szorozva a második tag négyzetével $\pm$ a második tag köbe. $(x+4)^3 = x^3 + x^2 \cdot 4 \cdot 3 + x \cdot 3 \cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ $\left(\frac{c}{2} - \frac{d}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^3 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{d}{3} \cdot 3 + \frac{c}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{d}{3}\right)^2 - \left(\frac{d}{3}\right)^3 = \frac{c^3}{8} - \frac{c^2d}{4} + \frac{cd^2}{6} - \frac{d^3}{27}$

Egyenlet, egyenlőtlenség megoldási elvei

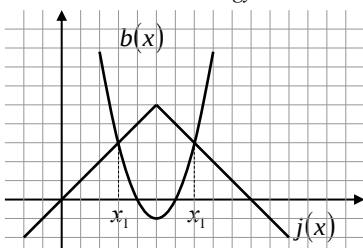
A gyökök (megoldások) megadását jelenti az alaphalmazban. Ha nincs megadva az alaphalmaz, akkor a középiskolában valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát értjük alatta, amelyet az egyenletben, egyenlőtlenségben szereplő függvények megengednek. A megoldására az alábbi módszerek ismertek: (Természetesen az itt megadottaktól eltérő egyenlet, egyenlőtlenség megoldási ötletek is léteznek.)

1.) **Közelítő megoldás.** (Elsősorban becslésre, az egyenlet, egyenlőtlenség megoldásainak keresésére szolgál a fellépő hibák, pontatlanság miatt. Ha a feladat lehetőséget ad arra, hogy egy bizonyos tűréshatáron belüli megoldásokat is elfogadjunk, akkor elfogadott módszer.)

a.) **Kétoldali közelítés módszere.** $\Rightarrow$ Az egyenletbe, egyenlőtlenségbe egy elég nagy majd egy elég kicsi értéket helyettesítünk be. Ezután a nagy értéket csökkentve, a kicsi értéket növelve vizsgáljuk a relációt az előző értékhez viszonyítva. A helyettesítési értékek egyenletes, célszerű változtatásával közelíthetjük, esetleg el is érhetjük a megoldást. (Ritkán alkalmazzuk!)

b.) **Grafikus megoldás.** $\Rightarrow$ Az egyenlet, egyenlőtlenség két oldalán szereplő függvényeket közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, s innen olvassuk le a megoldást. $\Rightarrow$ RITKÁN PONTOS!

• Legyen adott következő egyenlet: $(x-5)^2 - 1 = -|x-5| + 5$ Alaphalmaz: $A = \mathbb{R}$



Az egyenletet alkotó függvényeket ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben. Ezek a $b(x) = (x-5)^2 - 1$ illetve $j(x) = -|x-5| + 5$ függvények.

Meghatározzuk a két függvény grafikonjainak metszéspontjait. Ezek x koordinátája adja a megoldáshalmazt: $x_1 = 3$ és $x_2 = 7$. A megoldások mindegyike eleme az alaphalmaznak. Visszahelyettesítéssel ellenőrizve valóban megoldásai az egyenletnek.

2.) **Rendezéssel történő megoldás.** Ezzel a módszerrel az egyenletek, egyenlőtlenségek pontos értékeit, gyökeit, megoldáshalmazát adhatjuk meg.

a.) **Lebontogatás elve.** $\Rightarrow$ Ha az egyenletben, egyenlőtlenségben egy ismeretlen található, akkor használhatjuk ezt az elvet.

$$3x + 4 = 16 \quad | -4$$

$$3x = 12 \quad | :3$$

$$x = 4$$

Ha a gondolt szám 3-szorosához nem adtam volna hozzá 4-et, akkor

$16 - 4 = 12$ -t kaptam volna.

Ha a gondolt számot nem szoroztam volna meg 3-mal, akkor $12 : 3 = 4$ -et kaptam volna

Ezt a megoldási módot a legtöbb esetben „fejben” is el lehet végezni.

b.) **Mérleg elv.** $\Rightarrow$ Mindkét oldal egyenlő változtatása során mindig új, legtöbbször az előzőnél egyszerűbb egyenletekhez, egyenlőtlenségekhez jutunk. Ezekkel az **ekvivalens átalakításokkal** (amelyek során az eredeti egyenletnek egyetlen gyökét sem veszítjük el, s nem kapunk olyan gyököt (hamis gyököt), amely nem gyöke az eredeti egyenletnek) kapjuk meg a gyököket, megoldáshalmazt.

Ekvivalens átalakítások

Ekvivalensnek nevezzük az átalakítást, ha az nem változtatja meg az eredeti egyenlet, egyenlőtlenség megoldásainak számát. Ezek általában a következők: Mindkét oldalhoz ugyanakkora szám, vagy nem nulla mennyiség hozzáadása, elvétele. Mindkét oldal szorzása, osztása ugyanazzal a nem nulla számmal. Ha nullától különböző értékű algebrai kifejezéssel szorzunk, vagy hatványozunk, akkor a gyökök száma növekedhet; osztás, vagy gyökvonás esetén a megoldások száma csökkenhet. Ezért ezek nem ekvivalens átalakítások.

Nem ekvivalens átalakítások

Nullával való osztás. Ismeretlennel történő osztás. Hatványozás – gyökvonás. Logaritmizálás.

Ellenőrzés

A megoldáshalmaz minden elemét vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletbe, egyenlőtlenségbe, hiszen csak így bizonyosodhatunk meg róla, hogy ekvivalens átalakításokkal oldottuk-e meg a feladatot. A KÖNYVBEN SZEREPLŐ FELADATOK LEGTÖBBJÉNEK ELLENŐRZÉSÉT AZ OLVASÓRA BÍZOM!

Mozgási (fizikai) feladatok

Megoldási ötletek: A mozgási feladatokat grafikusan, illetve táblázat felírása után egyenlettel, ritkán logikai úton lehet megoldani. Mindegyik feladathoz rajzoljunk egy egyszerű vonalas ábrát a feladatban szereplő adatokkal, haladási irányokkal. A feladatok megoldásához leggyakrabban a táblázatos megoldást alkalmazzuk. A táblázatokban az $S = v \cdot t$ képletet alkalmazzuk (ahol a betűk $\Rightarrow$ s: út ; v: sebesség; t: idő ; $\Rightarrow$ a megfelelő mértékegységben). A táblázatba beírjuk az adatokat, illetve a közöttük levő összefüggéseket. Egy lehetséges táblázat két jármű mozgására a következő:

	Út [m]	Sebesség [m/sec]	Idő [sec]
1. jármű:			
2. jármű:			

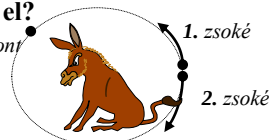
Az itt bemutatásra kerülő megoldási technika az egyenletrendszerekre épül.

- 1.) Egy 5,3 km hosszú körpályán két zsoké versenyez. Az egyik átlagsebessége 12,5 km/h, a másiké 14 km/h. A pálya egy pontjáról egyszerre indulnak.

a.) Mikor találkoznak, ha ellenkező irányba indulnak el?

A két zsoké együtt teszi meg a teljes utat!

Találkozási pont



I. megoldás:	Út [km]	Sebesség [km/h]	Idő [h]
1. zsoké:	s	12,5	t
2. zsoké:	5,3 - s	14	t

A táblázatba szürke háttérrel a feladatban megadott értékeket írtuk be.

Ha az első zsoké a másikkal való találkozásig s utat tesz meg, akkor a második zsoké a teljes útnál (5,3 km) ennyivel kevesebbet.

A találkozásig mindkét zsoké ugyanannyi időt tölt a pályán, ezért az időt mindkettőnél t-vel jelöljük.

A második egyenletbe az s helyére behelyettesítjük az első egyenletben megadott értéket.

Egyenletek:

$$s = 12,5 \cdot t$$

$$5,3 - s = 14 \cdot t$$

$$5,3 - 12,5t = 14t \quad / + 12,5t$$

$$5,3 = 26,5t \quad / : 26,5$$

$$t = 0,2$$

Válasz: A zsokék 0,2 óra = 0,2 · 60 perc = 12 perc múlva találkoznak.

Ellenőrzés: Az 1. zsoké 0,2 óra alatt $0,2 \cdot 12,5 = 2,5$ km-t tesz meg. A 2. zsoké 0,2 óra alatt

$0,2 \cdot 14 = 2,8$ km-t tesz meg. Ketten együtt $2,5 + 2,8 = 5,3$ km, azaz együtt a teljes pályát járták be.

II. megoldás:	Az első zsoké egy óra alatt 12,5 km-t a második 14 km-t tesz meg.
Ellenkező irányba indulva ketten együtt 1 óra alatt $12,5 + 14 = 26,5$ km-t tesznek meg. Jelöljük x-szel a pályán együtt töltött időt, így ketten együtt x óra alatt $x \cdot 26,5 = 5,3$ km-t tesznek meg. Ebből	
$x = 5,3 : 26,5 = 0,2$. Azaz 0,2 óra alatt teszik meg együtt a teljes utat.	

Másodfokú egyenlőtlenségek

Megoldási ötletek: A másodfokú egyenlőtlenségeket elsősorban grafikus úton célszerű megoldani. $x \in \mathbb{R}$

I. A megoldó-képlet alapján meghatározzuk a másodfokú kifejezések, mint függvények zérushelyét, majd az x^2 előjelét. Ez határozza meg, hogy a parabola szárai felfelé, vagy lefelé állnak-e! Hozzávetőlegesen (nem pontosan) megrajzoljuk a parabolát, figyelve a zérushelyekre, és az előzőleg említett előjelre. Csak azt kell figyelni, mely x értékek esetén lesz a parabola vonalának adott része az x tengelyhez képest a relációjelnak megfelelő helyzetben.

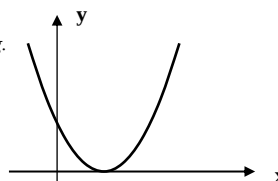
II. A kifejezést a másodfokú függvény $y = a \cdot (x + c)^2 + d$ alakúra hozzuk, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben. Vizsgáljuk, hogy a parabola mely pontjai teljesítik a reláció szerinti feltételt.

Keressük meg az alábbi egyenlőtlenségek igazsághalmazát! Az ellenőrzést az olvasóra bízom!

1.) $9x^2 - 30x + 25 \leq 0$

I. megoldás: A zérushelyeket a megoldó-képlettel határozzuk meg.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25}}{2 \cdot 9} = \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} = \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$



Ez azt jelenti, hogy a kifejezés teljes négyzet és a parabola görbéje az adott pontban érinti az x tengelyt. Az x^2 együtthatójának előjele pozitív, így a parabola az ábrán látható helyzetben van. A parabola minden pontja (az érintési pont kivételével) az x tengely fölött helyezkedik el, azaz pozitív. Az érintési pontban az egyenlőség esete áll fenn. Ez az egyetlen pont elégíti ki a feladatban szereplő relációk közül az egyenlőséget.

Így ennek az egyenlőtlenségnek egyetlen megoldása van: $x = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

II. megoldás:

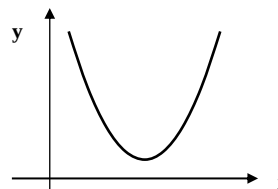
$$\begin{aligned} 9x^2 - 30x + 25 &= 9 \cdot \left(x^2 - \frac{30}{9}x\right) + 25 = 9 \cdot \left(x^2 - \frac{10}{3}x\right) + 25 = \\ &= 9 \cdot \left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right] + 25 = 9 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - 25 + 25 = 9 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Látható, hogy a kapott függvény a tengelypontjában érinti az x tengelyt.

2.) $9x^2 - 24x + 17 > 0$

I. megoldás: Meghatározzuk a parabola zérushelyeit.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 17}}{2 \cdot 9} = \\ &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 612}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{-36}}{18} \end{aligned}$$



Látható, hogy a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel, így ennek az egyenletnek nincs a valós számok között megoldása. A másodfokú tag előjele pozitív, így a parabola teljes egészében az x tengely fölött helyezkedik el, azaz minden pontja pozitív. A reláció tehát minden valós szám esetén igaz, tehát azonos egyenlőtlenség. A feladat megoldása: $x \in \mathbb{R}$. A második megoldás is ezt bizonyítja.

II. megoldás:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 24x + 17 &= 9 \cdot \left(x^2 - \frac{24}{9}x\right) + 17 = 9 \cdot \left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 17 = \\ &= 9 \cdot \left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right] + 17 = 9 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - 16 + 17 = 9 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítő módszer

Az **algebrai megoldás** lényege, hogy az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlen értékét (azt, hogy melyiket, azt a feladatban szereplő ismeretlenek együtthatója alapján célszerű eldönteni), majd ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe. Ha a feladat két ismeretlenes egyenletrendszer volt, akkor a kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk, majd a kapott értéket (egyik megoldás) az előző kifejezésbe helyettesítjük, hogy megkapjuk a másik megoldást is.

Több ismeretlenes egyenletrendszer esetén az egyik egyenletből kifejezett ismeretlent az összes többi egyenletben szereplő ilyen típusú ismeretlenbe helyettesítjük. Így eggyel kevesebb egyenletet kapunk. Megfelelő átalakításokkal ismét kifejezünk egy ismeretlent, majd megismételjük az előző eljárást. Ezt mindaddig ismételjük, amíg egy egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Ennek megoldása után visszafelé egyenként behelyettesítjük a kapott értéket, míg mindegyik ismeretlen értékét meg nem kaptuk.

Oldjuk meg **behelyettesítő módszerrel** a következő egyenletrendszert: $(x; y) \in R \times R$

$$2x + 3y = 10$$

$$3x - y = -7$$

$$2x + 3 \cdot (3x + 7) = 10$$

$$2x + 9x + 21 = 10$$

$$11x = -11$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

Célszerű a második egyenletből kifejezni az y értékét, tekintettel arra, hogy ennek együtthatója a legkisebb, azaz egy egész.

$y = 3x + 7$, melyet az első egyenletbe helyettesítünk.

A kapott egyenletet oldjuk meg.

$$y = 3 \cdot (-1) + 7 = -3 + 7$$

$$\underline{\underline{y = 4}}$$

A kapott értéket visszahelyettesítjük y -ba $\Rightarrow$

A $(-1; 4)$ végeredményeket visszahelyettesítéssel ellenőrizni kell!

Egyenlő együtthatók módszere

Több egyenlet között használható **algebrai megoldási** mód. E módszer lényege, hogy megvizsgálva az egyenletrendszerben az ismeretlenek együtthatóit arra törekszünk, hogy az egyik típusú ismeretlen a két egyenletben egymás ellentettje legyen. Ha nem ilyenek, akkor alkalmasan választott szorzószámmal (az adott ismeretlenek együtthatóinak legkisebb közös többszörösével) szorozzuk meg a szükséges egyenletet, vagy egyenleteket. Az így kapott egyenleteket összeadjuk. Hatására egyismeretlenes egyenletet kapunk. Ennek megoldását visszahelyettesítjük valamelyik eredeti egyenletbe, hogy a másik megoldást is kiszámíthassuk.

(Ha az egyenletekben sikerül azonos ismeretlenek esetén egyenlő együtthatókat előállítani, vagy az egyenletrendszer eleve így került felírásra, akkor a két egyenletet ki is vonhatjuk egymásból, hogy kiessenek az egyenlő együtthatójú ismeretlenek. A kivonásnál vigyázzunk az előjelekre!)

Oldjuk meg az **egyenlő együtthatók módszerével** a következő egyenletrendszert: az $(x; y) \in R \times R$ alaphalmazon.

$$2x + 3y = 10$$

$$3x - y = -7 \quad / \cdot 3$$

$$2x + 3y = 10$$

$$9x - 3y = -21$$

$$11x = -11$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

$$3 \cdot (-1) - y = -7$$

$$\underline{\underline{y = 4}}$$

Megvizsgálva az egyenletrendszert, látható, hogy az y ismeretlenek együtthatói ellentett előjelűek. Ha a második egyenletet 3-mal megszorozzuk, akkor abszolút értékében egyenlő, de előjelében ellentett ismeretleneket kapunk.

Látható, hogy csak a második egyenlettel foglalkoztunk, de az egyenletrendszer miatt az első egyenletet is le kell írni.

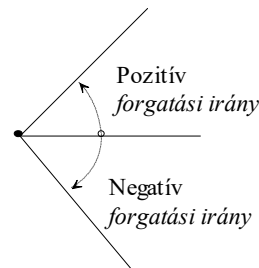
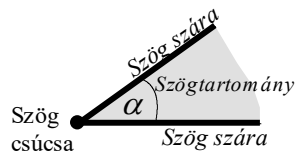
Az így kapott két egyenletet összeadjuk!

Az összeadás hatására az y ismeretlenek „kiesnek”. Ez az egyenlet már egyszerűen megoldható. A kapott értéket visszahelyettesítjük valamelyik **eredeti egyenletbe**. Itt a másodikat választottuk.

Célszerű betartani, hogy valamelyik eredeti egyenletbe helyettesítsünk vissza, hiszen ha az elvégzett átalakításokba hiba csúszik, vagy esetleg nem ekvivalens átalakításokat végeztünk, rossz az eredmény. A végeredményeket visszahelyettesítéssel ellenőrizni kell!

SZÖG

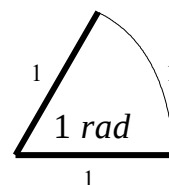
FOGALMA: Két közös kezdőpontú félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre bontja. Ezeket a részeket szögtartományoknak, röviden szögeknek nevezzük. A szögtartományokat a rajzon általában ívekkel jelöljük. Jelölésükre a görög ABC kisbetűit alkalmazzuk. Ha nem jelöljük külön, akkor mindig a kisebb szögtartományra gondolunk. (Itt ezt a szöget jelöltük.) **Forgásszögnek** is nevezzük, ha úgy tekintjük, hogy az egyik fix szárhoz képest a másik szárát a közös kezdőpont körül elforgatjuk. Ha a forgatás iránya ellentétes az óramutató járásával, akkor pozitívnak, ha megegyezik az óramutató járásával, akkor negatívnak nevezzük.



MÉRÉSE: Minden szöghöz hozzárendelhető egy olyan nemnegatív valós szám, melyet a szög mértékszámának nevezzük.

- Fok:** az egyenesszög (lásd lejjebb) 180-ad része. Jele: 1° A fok hatvanad része a szögperc: $1^\circ = 60'$, illetve a szögperc hatvanad része a szögmásodperc: $1' = 60''$, így $1^\circ = 3600''$
- Radián (ívmérték):** 1 radián az egységnyi sugarú kör, egységnyi ívéhez tartozó középponti szög. Az egyenesszög értéke ívmértékben: π . Jelölése: ha radiánban adunk meg egy szög értékét, akkor felül ívvel jelöljük: $\hat{\alpha}$ vagy a **rad** szót írjuk utána.

Átváltások: $1^\circ \approx 0,017453...rad$ valamint $1 rad \approx 57^\circ 17' 45''$



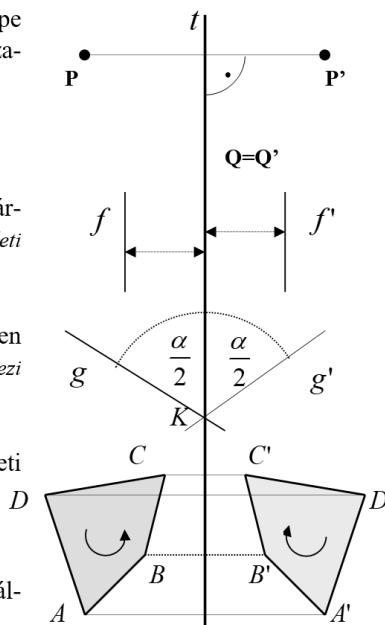
Minden szögmértékre: $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$ és $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \hat{\alpha}$

FAJTÁI:

Nullszög	A szög két szára azonos, a szögtartomány a két egybeeső félegyenes. <u>Értéke:</u> 0°	
Teljesszög	A szög két szára azonos, a szögtartomány a teljes sík. <u>Értéke:</u> $360^\circ = 2 \cdot \pi$	
Egyenesszög	A szög két szára egy egyenesbe esik, a szögtartomány a félsík. <u>Értéke:</u> $180^\circ = 1 \cdot \pi$	
Derékszög	A szög szárai merőlegesek, a szögtartomány az egyenesszög fele. <u>Értéke:</u> $90^\circ = \frac{\pi}{2}$	
Hegyesszög	A nulla-szögnél nagyobb, de a derékszögnél kisebb szög. <u>Értéke:</u> $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ[$	
Tompaszög	A derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szög. <u>Értéke:</u> $\beta \in]90^\circ; 180^\circ[$	
Homorúszög	Az egyenesszögnél nagyobb, de a teljesszögnél kisebb szög. <u>Értéke:</u> $\gamma \in]180^\circ; 360^\circ[$	

A tengelyes tükrözés tulajdonságai

1. A tengelyre nem illeszkedő P pont és tükörképe a P' pont olyan PP' szakasz alkot, amelynek szakasz felező merőlegese a t tengely.
2. A tengely bármely pontjának képe önmaga.
3. A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe párhuzamos a tengellyel. $f \parallel t \parallel f'$ A tengely az eredeti és a tükörkép egyenestől egyenlő távolságra van.
4. A tengelyt metsző egyenes és a képe a tengelyen metszi egymást. $g \cap t = g' \cap t = K$ A tengely felezi az eredeti és a tükörkép-egyenes által bezárt szöget.
5. Bármely alakzat tükörképe egybevágó az eredeti alakzattal.
 $ABCD_{\text{négyszög}} \cong A'B'C'D'_{\text{négyszög}}$
6. A tengelyes tükrözés a körüljárás irányát megváltoztatja. (Lásd a rajzot!)



Tengelyes tükörkép szerkesztése

Egy tengelyen kívüli P pont tükrözése:

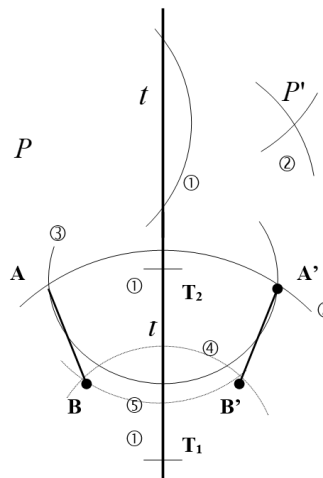
A szerkesztés lépései:

1. Beszúrjuk a körzőt a P pontba. Kinyitjuk a pont és egyenes távolságánál nagyobb távolságra, majd elmetsszük az egyenest két helyen.
2. Ugyanezzel a körzőnyílással az egyenesen levő metszéspontokból köríveket rajzolunk az egyenes P ponttal ellentétes oldalán. E körívek metszéspontja a keresett P' pont.

Több pont (alakzatok) tükrözése:

A szerkesztés lépései:

1. A tengelyen kijelölünk két pontot. $\Rightarrow T_1$ és T_2
2. A T_1 pontba beszúrjuk a körzőt, majd körzőnyílásba vesszük az egyik pontot (pl.: A), majd az egyenes e ponttal átellenes oldalán körívet rajzolunk.
3. A T_2 pontba beszúrjuk a körzőt, majd körzőnyílásba vesszük az előző pontot (pl.: A), majd az egyenes e ponttal átellenes oldalán körívet rajzolunk.
4. Az eljárást mindegyik pontnál megismételjük.



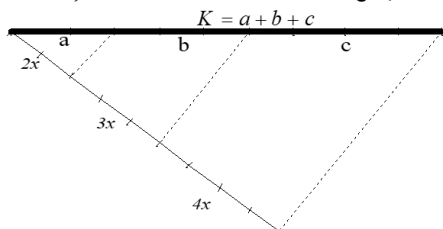
Egyenes tükrözése: Jelöljük ki rajta két pontot (ha a két egyenes nem párhuzamos, akkor az egyik lehet a tengellyel való metszéspont is), majd e két pontot tükrözzük! A tükörkép pontokon át az egyenes tükörképe megrajzolható.

Szög tükrözése: A szög csúcsát, illetve a szögcsúcsán egy-egy pontot jelöljük ki, majd e három pontot tükrözzük. A kapott három tükörképen át, figyelve a szög csúcsának tükörképére, a szög megrajzolható.

Kör tükrözése: Tükrözzük a kör középpontját, majd az új középpontba az eredetivel megegyező sugárral rajzoljuk kör.

2.) Szerkesztési feladatok:

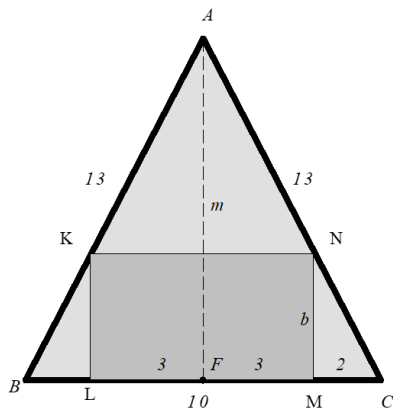
a.) Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, és oldalainak aránya 2:3:4!



A háromszög oldalainak aránya: $a : b : c = 2 : 3 : 4$. Ez azt jelenti, hogy a kerületet $2+3+4=9$ egyenlő részre kell osztani.

Vegyünk fel a kerületet jelölő szakaszt, húzzunk egy félegyenest, s jelöljünk be rajta 9 egyenlő részt körzővel. Az utolsó osztópontot kössük össze a szakasz végpontjával. Az így keletkezett szakaszt toljuk el párhuzamosan a szükséges osztópontokba. Ezek a párhuzamosok metszik ki a kerületből a szükséges szakaszok hosszát. Ezekből meg tudjuk szerkeszteni a háromszöget.

b.) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm-esek. Szerkesszünk ebbe a háromszögbe egy téglalapot úgy, hogy annak 6 cm-es oldala a háromszög alapjára, másik két csúcsa a háromszög száraitra illeszkedjen. Számítsuk ki a téglalap másik oldalának hosszát!



Mivel a háromszög egyenlő szárú, így tengelyesen tükrös. A téglalapot szintén e tengelyre szimmetrikusan kell elhelyezni. Mivel a 6 cm-es oldal fele 3 cm, így a szimmetriatengely F pontjától balra és jobbra a háromszög alapján megjelölhetjük a téglalap L és M pontját. Ezekbe a pontokba merőlegest állítva, e merőlegesek metszik ki a szárból a téglalap másik két: K és N csúcsát.

A háromszög magassága: $m^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow m = 12$

A hiányzó oldal kiszámításához vegyük észre, hogy $CMN_{\Delta} \sim CFA_{\Delta}$, mert egy szögük közös, másik szögük derékszög, így a harmadik is egyenlő. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

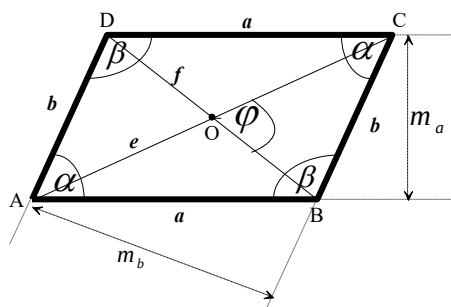
$$\frac{b}{m} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{2}{5} \Rightarrow b = \frac{24}{5} = 4,8$$

Paralelogramma

Definíció: Az olyan négyszöget, melynek két párhuzamos oldalpárja van, paralelogrammának nevezzük.
 $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$ (A paralelogramma speciális trapéz.)

Elnevezések

Magasságvonal: két párhuzamos oldal távolsága. A paralelogrammának két magassága van.
 Jelölése: aszerint, hogy melyik párhuzamos oldalak távolságát jelöli: m_a ; m_b



Tulajdonságok

- 1.) Szemközti oldalai egyenlők:
 $AB = CD = a$; $BC = AD = b$
Egy négyszög paralelogramma, ha szemközti oldalai párhuzamosak
- 2.) Szemközti szögei egyenlők: $\angle DAB = \angle BCD = \alpha$; $\angle ABC = \angle ADC = \beta$
Egy négyszög paralelogramma, ha szemközti szögei egyenlők.
- 3.) Bármely két szomszédos belső szögének összege egyenlő 180° -al: $\alpha + \beta = 180^\circ$
Egy négyszög paralelogramma, ha bármely két szomszédos belső szögének összege 180° .
- 4.) Átlói felezik egymást. Metszéspontjuk: O, a paralelogramma szimmetria középpontja. (Az átlók nem felezik a szögeket.)
Egy négyszög paralelogramma, ha átlói felezik egymást.

Paralelogramma kerülete, területe

A paralelogramma **kerülete** egyenlő kétszomszédos oldal hossza összegének kétszeresével.

A paralelogramma **területét** adó eljárások:

- A paralelogrammát részháromszögekre bontjuk, s ezek területösszegét vesszük.
- Egy oldal hosszának és az oldalhoz tartozó magasság hosszának szorzatával egyenlő.

A „Területképletek” fejezetben további trigonometriai összefüggéseket találunk.

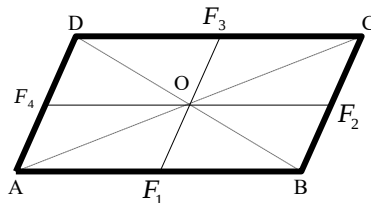
$$K_{\text{paralelogramma}} = (a + b) \cdot 2$$

$$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Ötletek

A paralelogramma szerkesztését és a számításokat segíti az alábbi néhány ötlet:

- A paralelogramma speciális trapéz, így mindazok a tulajdonságok, melyek érvényesek a trapézra, igazak a paralelogrammára is.
- A paralelogrammának két középvonala van, melyek párhuzamosak, s egyenlők a paralelogramma két oldalával. A két középvonal a paralelogramma szimmetria középpontjában metszi egymást. A két középvonal négy egybevágó paralelogrammára bontja az eredeti paralelogrammát.
- Ha a paralelogrammát bármelyik oldalával párhuzamos egyenessel elmetsszük, akkor a két rész mindegyike paralelogramma.

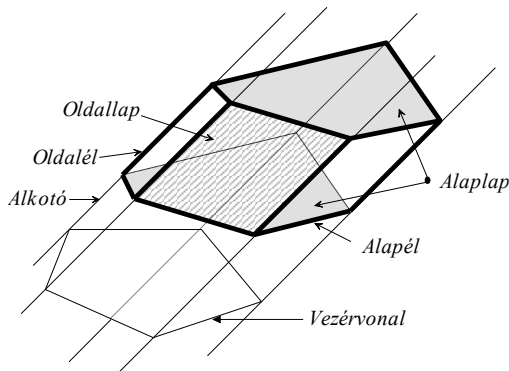


HASÁB

Ha egy sokszög vonal (nevezük **vezérvonalnak**) pontjain keresztül a tér egy adott (a sokszög síkjával nem párhuzamos) egyenesével párhuzamos egyeneseket (**alkotókat**) fektetünk, akkor végtelen hasábfelületet kapunk. Ha ezt a végtelen felületet (két általános helyzetű) párhuzamos síkkal elmetszünk, akkor a két sík és a hasábfelület egy testet fog közre, melyet **hasábnak** nevezünk.

Elnevezések

- **Alkotó:** a párhuzamos egyenes szakaszokat alkotóknak nevezzük.
- **Alaplap:** a végtelen hasábfelület által a két párhuzamos síkból kimetszett, egybevágó sokszöget a hasáb alaplapjainak nevezzük. Az alaplap területét **alapterületek** nevezzük. A könyvben használt jele: T_a
- **Alapél:** az alaplapon levő élek.
- **Oldallap:** a végtelen hasábfelületből az alaplap élei által kimetszett lapok. Ezek a lapok **paralelogrammák**.
- **Palást:** az oldallapok összessége. Az oldallapok területének összege a palást területe. A könyvben használt jele: P_t
- **Oldalél:** az oldallapok élei.
- **Testmagasság vonal:** a két alaplap távolsága. A könyvben az alaplapok távolságát M betűvel jelöljük.

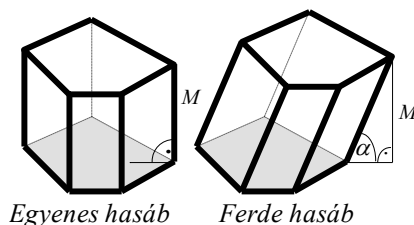


Hasábok csoportosítása

Alkotók helyzete szerint

Aszerint, hogy az alkotók milyen helyzetűek az alaplap síkjával, a következő hasábokat különböztetjük meg:

- **Ferde hasáb:** az oldalélek nem derékszöget zárnak be az alaplap síkjával. Az oldallapok **paralelogrammák**. Ekkor a hasáb magasságvonala az oldaléltől különböző.
- **Egyenes hasáb:** az oldalélek merőlegesek az alaplap síkjára. Az oldallapok **téglalapok**. A hasáb magasságvonala és oldaléle egybeesik.



Egyenes hasáb

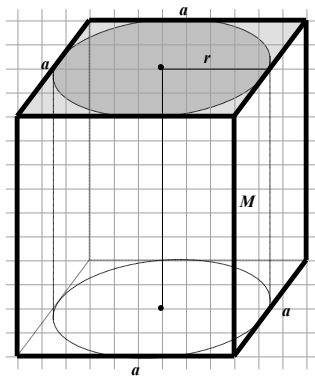
Ferde hasáb

Ha külön nem említjük, akkor a hasábok esetén mindig egyenes hasábokra gondolunk.

Alaplap szerint

- **Sokszög alapú hasáb:** a szerint, hogy az alaplap milyen sokszög, megkülönböztetünk négyzet alapú-, téglalap alapú-, trapéz alapú-, ... ; sokszög alapú hasábokat. A hasáb lehet ferde, vagy egyenes. Közülük ismert a **paralelogramma** alapú, ferde hasáb, melynek neve: **Paralelepipedon**. Rajza a „Felszín, térfogatszámítás” fejezetben található.
- **Szabályos hasáb:** ha az egyenes hasáb alaplapja szabályos sokszög, akkor a hasábot **szabályos hasábnak** nevezzük. Ilyen hasáb például a **négyzet alapú hasáb**, melyet **Négyzetes oszlop** néven ismerünk. Ha a négyzetes oszlop oldallapjai is négyzetek, akkor a **Kocka** nevet használjuk. Ha a hasáb minden lapja téglalap, akkor **Téglalapról** beszélünk.

- 1.) Egy négyzetes oszlop alapéle 10 cm, magassága 20 cm. Mekkora a belőle készíthető maximális térfogatú henger felszíne? Mekkora a két test felszínének és térfogatának aránya?



Az adatok: $a = 10 \text{ cm}$; $M = 20 \text{ cm}$ A maximális térfogatú henger alapkörének sugara megegyezik a négyzetbe írható kör sugarával. Ez a négyzet oldalának fele: $r = \frac{a}{2} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$

A henger magassága megegyezik a négyzetes oszlop magasságával. Ezek ismeretében meghatározhatjuk a henger felszínét:

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + M) = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (5 + 20)$$

$$A_{\text{henger}} = 250\pi \text{ cm}^2$$

A henger térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot M = 5^2 \cdot \pi \cdot 20$$

$$V_{\text{henger}} = 500\pi \text{ cm}^3$$

A hasáb felszíne, térfogata:

$$A_{\text{hasáb}} = 2 \cdot T_a + K \cdot M = 2 \cdot a^2 + 4a \cdot M = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 20$$

$$A_{\text{hasáb}} = 1000 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{hasáb}} = T_a \cdot M = a^2 \cdot M = 10^2 \cdot 20$$

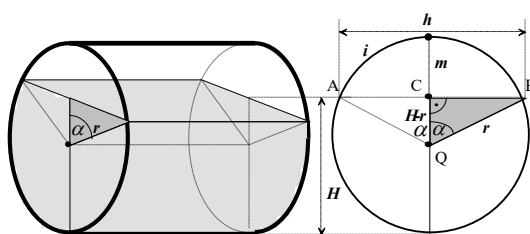
$$V_{\text{hasáb}} = 2000 \text{ cm}^3$$

A két test felszínének, térfogatának aránya:

$$\frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{hasáb}}} = \frac{250\pi}{1000} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{V_{\text{henger}}}{V_{\text{hasáb}}} = \frac{500\pi}{2000} = \frac{\pi}{4}$$

- 2.) Egy vízszintesen fekvő henger alakú tartályban 120 cm magasan áll a víz. Hány liter víz van a tartályban, ha 16 dm átmérőjű, és két és fél méter hosszú?



A térbeli rajz elkészítése után külön megrajzoljuk az alaplapot. Képzeljük el, hogy ezt a tartályt „megfagytott” vízzel a körlapjára állítjuk. Ekkor egy hasábot kapunk, melynek magassága megegyezik a tartály hosszával. A térfogat meghatározásához már csak az alaplap területét kell meghatározni. Az adatok:

$$d = 16 \text{ dm} \Rightarrow r = 8 \text{ dm}$$

$$M = 25 \text{ dm}; H = 12 \text{ dm}$$

Az alaplap területét kapjuk, ha a körlap területéből kivonjuk annak a körszeletnek a területét, melynek középponti szöge: 2α . A szög értékét a QBC derékszögű háromszögből határozhatjuk meg. Ennek ismeretében az ív és a húr hosszát is megadhatjuk:

$$\cos \alpha = \frac{H - r}{r} = \frac{12 - 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{Ív hossza: } i = \frac{r \cdot \pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{8 \cdot \pi}{180^\circ} \cdot 120^\circ \Rightarrow i = 16,755 \text{ dm}$$

$$\text{Húr: } \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (H - r)^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 16 = 64 \Rightarrow h = 13,856 \text{ dm}$$

$$\text{A körszelet magassága: } m = d - H = 16 - 12 \Rightarrow m = 4 \text{ dm}$$

A körszelet területe:

$$t_{\text{szelet}} = \frac{r \cdot i - h \cdot (r - m)}{2} = \frac{8 \cdot 16,755 - 13,856 \cdot 4}{2}$$

$$t_{\text{szelet}} = 39,3086 \text{ dm}^2$$

A hasáb alapterülete:

$$T_a = t_{\text{kör}} - t_{\text{szelet}}$$

$$T_a = 161,6759 \text{ dm}^2$$

$$V = T_a \cdot M$$

$$\text{Térfogat: } V = 4041,898 \text{ liter}$$

1.) Egy négyzet alapú gúla alapéle 24 cm, magassága 20 cm. Határozzuk meg az alaplap-oldalél, alaplap-oldallap, alapél-oldalél hajlásszögét!

Elkészítjük a gúla rajzát, majd bejelöljük a kapott csúcspontokat, és ismert, valamint keresett értékeket. Így az adatok: $a = 24 \text{ cm}$; $M = 20 \text{ cm}$

Az alaplap-oldalél hajlásszöge az AGE derékszögű háromszögben megjelölt α szög. Ennek értékét ebben a derékszögű háromszögben csak akkor tudjuk meghatározni, ha az ismert testmagasság mellett még egy oldalt ismernénk. Az $\frac{e}{2}$ az alaplap átlójának a fele. Az alaplap egy négy-

zet, melynek átlója az ismert: $e = a \cdot \sqrt{2}$ képlettel határozható meg. Így

$$\frac{e}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{24 \cdot \sqrt{2}}{2} = 16,9706$$

Innen már felírhatjuk az AGE háromszögben az α szöggel szemközti befogó, és a szög melletti befogó arányát:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{\frac{e}{2}} = \frac{20}{16,9706} = 1,1785'$$

melyből $\alpha = 49^\circ 41'$

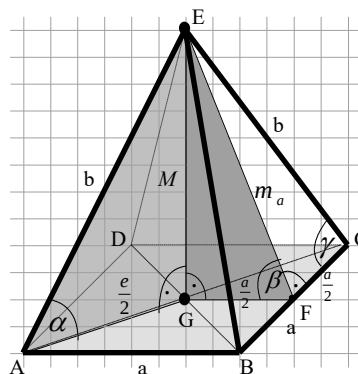
Az alaplap-oldallap hajlásszöge a GFE derékszögű háromszögben megjelölt β szög. Ebben ismert a szöggel szemközti és a szög melletti befogó, így:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M}{\frac{a}{2}} = \frac{20}{12} = 1,6667', \text{ melyből } \beta = 59^\circ 02'$$

Az alapél-oldalél hajlásszöge a CFE derékszögű háromszögben megjelölt γ szög. Csak az alapél felét ismerjük, így az AGE háromszögben kiszámítjuk a b oldalél hosszát:

$$\sin \alpha = \frac{M}{b} \Rightarrow \sin 49^\circ 41' = \frac{20}{b} \Rightarrow b = 26,2302 \text{ cm}$$

Így már meghatározhatjuk a CFE háromszög keresett szögét: $\cos \gamma = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{12}{26,2302} = 0,4575' \cdot \text{Így } \gamma = 62^\circ 46'$



Kivonás

Helyvektorok különbségének koordinátái megegyeznek az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak különbségével.

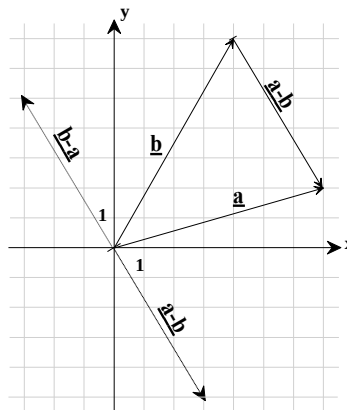
$$\underline{a} - \underline{b} \quad (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

$$\underline{a}(7;2) \quad \underline{b}(4;7)$$

Például: $\underline{a} - \underline{b} \quad (7 - 4; 2 - 7)$

$$\underline{a} - \underline{b} \quad (3; -5) \quad \text{és} \quad \underline{b} - \underline{a} \quad (-3; 5)$$

A tanultak szerint a különbségvektor a kisebbítendő végpontjába mutat. Így ha az $\underline{a}$ vektorból vonjuk a $\underline{b}$ vektort, akkor a különbségvektor az $\underline{a}$ vektor végpontjába mutat.



Vektor szorzása számmal (konstanssal)

Egy vektor szám-szorosának koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáinak szám-szorosával.

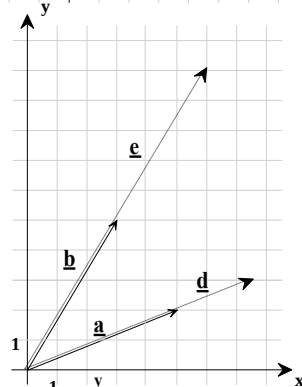
Adott egy $\underline{a} \quad (a_1; a_2)$ koordinátákkal adott vektor és egy $k \in R$ valós

szám. Ekkor a $k \cdot \underline{a}$ vektoron azt a $\underline{c} = k \cdot \underline{a}$ vektort értjük, melynek koordinátái: $\underline{c} \quad (k \cdot a_1; k \cdot a_2)$

Például: Adottak a következő vektorok: $\underline{a}(5;2) ; \underline{b} \quad (3;5)$

$$\underline{d} = \frac{3}{2} \cdot \underline{a} \Rightarrow \underline{d} \left(\frac{3}{2} \cdot 5; \frac{3}{2} \cdot 2 \right) \Rightarrow \underline{d} \left(\frac{15}{2}; 3 \right)$$

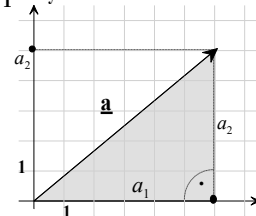
$$\underline{e} = 2 \cdot \underline{b} \Rightarrow \underline{e}(2 \cdot 3; 2 \cdot 5) \Rightarrow \underline{e} \quad (6;10)$$



Vektor hossza (abszolút értéke)

Egy $\underline{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza (abszolút értéke) egyenlő a vektor két koordinátája négyzetösszegének négyzetgyökével. $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Például: $\underline{a}(6;5) \Rightarrow |\underline{a}| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$



Vektor skaláris szorzata

A vektorok szorzatát kétféle módon is meghatározhatjuk. Adott két vektor:

$$\underline{a}(a_1; a_2) ; \underline{b}(b_1; b_2)$$

Például: $\underline{a}(6;2) ; \underline{b}(4;6)$

1. Két vektor skaláris szorzata egyenlő, a megfelelő koordinátáik szorzatával: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

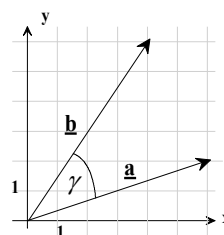
Például: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 24 + 12 = 36$

2. Két vektor skaláris szorzata egyenlő a két vektor abszolút értékének (hosszáinak), és a két vektor által bezárt szög cosinusának szorzatával:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$$

A szög értéke: $\gamma = 42^\circ 42' 20''$, illetve $|\underline{a}| = \sqrt{40} ; |\underline{b}| = \sqrt{60}$.

Így $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{60} \cdot \cos 42^\circ 42' 20'' \approx 36$



2.) Egy háromszög egyik csúcsa az $A(-4;-2)$ pont, két magasságvonalának egyenlete:

$$m_b: 3x + 11y = 40; m_c: 5x + 2y = 13$$

a.) Határozzuk meg a másik két csúcspont koordinátáit!

A vázlatba berajzoljuk az ismert adatokat. Bejelöljük az adott csúcspontot, s meghúzzuk a két magasságot, melyekről tudjuk, hogy merőlegesek a szemközti oldalra.

Az adatok ismeretében próbáljuk megszerkeszteni a háromszöget.

A vázlat alapján vegyünk fel a síkban ilyen helyzetű adatokat.

A szerkesztés lépései:

1. Az A pontból állítsunk merőleges c egyenest az m_c magasságra.
2. A c egyenes és az m_b egyenes metszéspontja a B pont.
3. Az A pontból állítsunk merőleges b egyenest az m_b egyenesre.
4. A b egyenes és az m_c magasság egyenes metszéspontja a C pont.

E szerkesztési lépések megegyeznek a feladat koordináta geometriai megoldásával.

A megoldás lépései:

1. Ahhoz, hogy merőlegest tudjunk állítani a magasságokra, az egyenletükből meg kell határozni ezek irányvektorait: $\underline{v}_{m_c}(2;-5); \underline{v}_{m_b}(11;-3)$ Az adott egyenesekre merőleges egyenesek felírásához a normálvektoros

egyenletet használjuk: $\overset{v_1}{A}x + \overset{v_2}{B}y = \overset{v_1}{A}x_0 + \overset{v_2}{B}y_0$, ahol

Így az A ponton átmenő, m_c egyenesre merőleges c egyenes egyenlete: $c: 2x + 5y = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2)$,

Ebből a $c: 2x - 5y = 2$ egyenlethez jutunk.

2. $c \cap m_b \Rightarrow B$, melyhez a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{array}{l} c: 2x - 5y = 2 \\ m_b: 3x + 11y = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 6; y = 2$$

Így a B pont koordinátái: $\underline{B(6;2)}$

3. Az A ponton átmenő, s az m_b egyenesre merőleges b egyenes egyenlete: $b: 11x + 3y = 11 \cdot (-4) + 3 \cdot (-2)$

Ebből a $b: 11x - 3y = -38$

4. $b \cap m_c \Rightarrow C$, melyhez a következő egyenletrendszert kell megoldani:

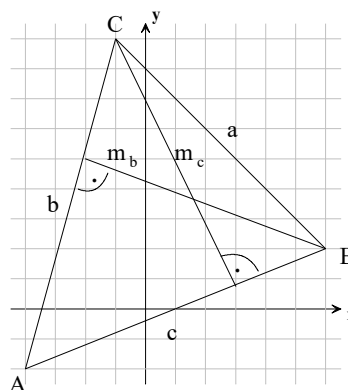
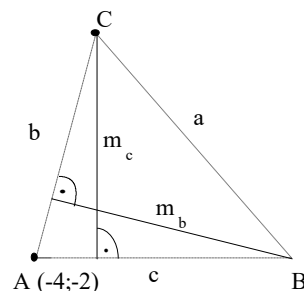
$$\left. \begin{array}{l} b: 11x - 3y = -38 \\ m_c: 5x + 2y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1; y = 9$$

Így a C pont koordinátái: $\underline{C(-1;9)}$

b.) Határozzuk meg a súlypontjának koordinátáit!

A háromszög súlypontjának koordinátáit az ismert képlettel számítjuk ki:

$$S\left(\frac{-4 + 6 + (-1)}{3}; \frac{-2 + 2 + 9}{3}\right) \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{3}; 3\right)}}$$



SPECIÁLIS SOROZATOK

Számtani sorozat

Értelmezése

Az olyan számsorozat, amelynek minden tagját, a másodiktól kezdve, úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz ugyanazt a számot (differenciát (*különbséget*) $\Rightarrow d$) hozzáadjuk, számtani sorozatnak (haladványnak) nevezzük. $a_{k+1} = a_k + d$ ($k \geq 1$)

(Egy sorozat számtani sorozat, ha **különbségsorozata állandó**: $a_{k+1} - a_k = d$)

Elem sorszáma:	1.	2.	3.	4.	5.	...	n .
• $a_1 = -5; d = 2$	-5	-3	-1	+1	+3	...	$a_n = 2n - 7$
• $b_1 = 7; d = -2$	7	5	3	1	-1	...	$b_n = -2n + 9$

Összefüggések

$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$	Egy számtani sorozatban (a másodiktól kezdve) egy tag a két szomszédos tag számtani közepével egyenlő.
$a_{k-i} + a_{k+i} = 2 \cdot a_k$ ($k, i \in \mathbb{N}, k-i \geq 1, k+i \leq n$)	Egy számtani sorozat adott a_k elemétől szimmetrikusan elhelyezkedő elemeinek számtani közepe egyenlő a közbűlső elem kétszeresével. Ugyanez igaz páratlan sok szomszédos elem esetére is.
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	Egy számtani sorozat általános (n .) tagját adó képlet.
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	Egy számtani sorozat első n tagjának összegét megadó képletek.

Típusfeladatok

Adott a SZÁMTANI SOROZAT néhány adata. Számítsuk ki a hiányzó értékeket!

Megoldási ötletek: Az adott képleteket alkalmazzuk. Vannak olyan feladatok, melyben a sorozat bizonyos elemeit adják meg, esetleg a sorozat néhány tagjának összege szerepel. Ekkor előnyösen alkalmazható, ha az adatokat táblázatba rendezzük.

$$1.) \quad \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 3 \\ n = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} a_n = ? \\ S_n = ? \end{cases}$$

Egyszerűen alkalmazzuk a képleteket:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d & S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n & S_n &= \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n \\ a_{26} &= 4 + (26-1) \cdot 3 & S_{26} &= \frac{4 + 79}{2} \cdot 26 & \text{Vagy: } S_{26} &= \frac{2 \cdot 4 + (26-1) \cdot 3}{2} \cdot 26 \\ \underline{\underline{a_{26} = 79}} & & \underline{\underline{S_{26} = 1079}} & & \underline{\underline{S_{26} = 1079}} \end{aligned}$$

1.) Abszolútérték függvény II.

$$c: R \rightarrow R, x \mapsto |x+3| - |x-2|$$

1.) Megoldás:

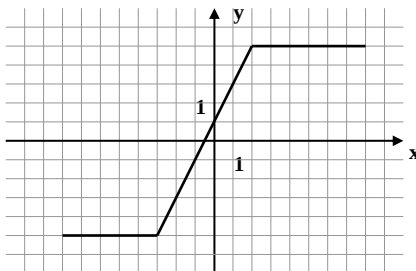
A függvény két abszolútértékes függvény különbsége. Ezeket jelölve $q(x) = |x+3|$ illetve

$$r(x) = |x-2|. \text{ E kettő különbsége az eredeti függvény: } c(x) = q(x) - r(x)$$

Értéktáblázatot készítünk ezekhez a függvényekhez:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$q(x) = x+3 $	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$r(x) = x-2 $	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
$c(x) = q(x) - r(x)$	-5	-5	-5	-3	-1	1	3	5	5	5	5

Ezeket az értékeket ábrázoljuk koordináta-rendszerben.



Függvény vizsgálat:

$$D_c: R$$

$$R_c: c(x) \in [-5; +5]$$

$$\text{Szélső érték: } x_{\min} = -5 \text{ ha } x \leq -3$$

$$x_{\max} = 5 \text{ ha } x \geq 3$$

$$\text{Zérushely: } x_0 = -0,5$$

A függvény a -0,5 pontban metszi az x tengelyt. Ennek értékét most csak leolvastuk, de ki is lehet számítani. Ezt is itt látod!

A függvény a zérushelyét a -3 és +2 között veszi fel. Ekkor az első függvény pozitív, a másik negatív. A függvény értéke a zérushelynél nulla.

$$\text{Menete: } x \in]-\infty; -3[\Rightarrow \text{konstans, értéke } -5$$

$$x \in [-3; +2] \Rightarrow \text{szigorúan monoton nő.}$$

$$x \in]+2; +\infty[\Rightarrow \text{konstans, értéke } +5.$$

Korlátosság: Alulról és felülről is korlátos:

$$K = 5$$

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A függvény értékkészlete a -5 és +5 zárt intervallumba eső valós számok halmaza

A függvény a -5 értéket veszi fel a -3-nál kisebb, vagy egyenlő helyen. A függvény a +5 értéket veszi fel a +3-nál nagyobb, vagy egyenlő helyen.

$$|x+3| - |x-2| = 0$$

$$+(x+3) - (x-2) = 0$$

$$x+3+x-2=0$$

$$2x-1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Megadjuk az x értékek azon intervallumait, ahol a függvény más - más növekedést-csökkenést mutat.

A függvény értékkészlete a $[-5; +5]$ intervallumba esik, ezért létezik a függvény korlátja.